Universidade Federal do Espírito Santo
Programa Institucional de Iniciação Científica
Relatório Final de Pesquisa
Ciências Exatas e da Terra

Métodos e formulações para o problema de layout em fila dupla

Identificação:

Grande área do CNPq: Ciências Exatas e da Terra

Área do CNPq: Matemática Aplicada

Título do Projeto: Métodos Computacionais em Otimização

Professor Orientador: Leonardo D. Secchin

Estudante PIBIC/PIVIC: Manoel de Almeida Rocha Neto

Resumo: *Problemas de layout em fila dupla (PLFD) tratam da maneira que dispomos facilidades (máquinas) ao longo dos lados de um corredor, como em uma linha de produção, de modo a minimizar certo objetivo. Em grande parte esse problema aparece em indústrias manufatureiras com o objetivo de minimizar o custo de transporte de matéria prima pré-processada entre máquinas, diminuindo o custo total de comunicação entre máquinas. Modelos de programação linear inteira mista foram propostos na literatura para o PLFD, cuja resolução computacional deu-se por métodos enumerativos tipo branch and bound. Tais modelos utilizam a estratégia de "M grande", tornando as relaxações usuais em métodos branch and bound muito pobres. Isso se reflete no aumento do tempo de resolução. Neste subprojeto, avaliamos estratégias para resolução do PLFD que não fazem uso de constantes tipo "M grande", notadamente, o método disjuntivo de Balas. Foram realizados testes computacionais, que acabaram por corroborar os atuais modelos de inteiros mistos como boas alternativas. Durante o desenvolvimento do subprojeto, pesquisas publicadas muito recentemente foram também consideradas. Em particular, testes foram realizados com os melhores limitantes M até o momento. Outras estratégias também foram abordadas, e apontam para melhorias a serem consideradas em trabalhos futuros.*

Palavras chaves: Programação Linear Inteira Mista. Programação Não-Linear. Formulação de Balas. Problemas de layout em fila dupla.

1 Introdução

Como descrito no subprojeto submetido ao PIIC-UFES, o problema considerado neste é o da localização de facilidades (máquinas, departamentos etc) ao longo de uma linha, de modo a minimizar certo objetivo. Usualmente este objetivo representa o custo total de transporte/comunicação entre as facilidades. Tais problemas surgem em aplicações provenientes da indústria manufatureira (consulte por exemplo (Chung & Tanchoco, 2010) e (Secchin & Amaral, 2018)). Dentre os vários tipos de layouts possíveis, destaca-se o de fila dupla, onde as facilidades são dispostas em duas fileiras. Desta forma, o custo de comunicação entre duas facilidades é determinado pelo produto da distância entre as facilidades pelo custo fixo por unidade de comprimento; quanto mais distantes forem duas facilidades, maior será o custo entre elas. A Figura 1 ilustra uma típica configuração de layout em fila dupla. Como mencionado anteriormente, o objetivo é o de minimizar o custo total de comunicação.

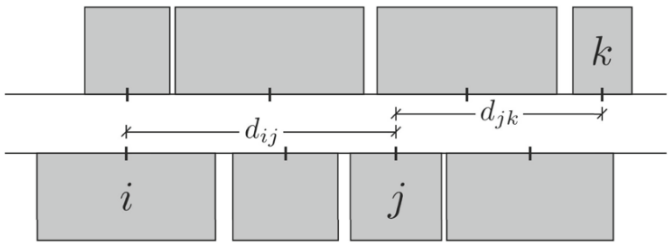

Figura 1: *Layout* em fila dupla. A distância d_{ij} entre as facilidades i e j é a distância entre seus centros. Fonte: (Secchin & Amaral, 2018).

Neste subprojeto trataremos do problema de layout em fila dupla (PLFD) e suas variantes. Uma formulação matemática genérica para o problema com facilidades é dada por

$$\min_{\phi \in D} \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} d_{ij}^{\phi} \tag{1}$$

onde é D o conjunto de todos os possíveis layouts, d_{ij}^{ϕ} é a distância entre as facilidades i e j referentes ao layout ϕ, e c_{ij} é o custo fixo unitário de comunicação entre as facilidades i e j. O PLFD é considerado há décadas na literatura, sendo tratado inicialmente por modelos matemáticos que apenas aproximam soluções de (1) ou ainda utilizando (meta)heurísticas. Chung & Tanchoco (2010) propuseram um modelo matemático linear inteiro misto, pelo qual recuperam-se soluções ótimas exatas do problema, ao fornecerem uma descrição precisa do conjunto de layouts D em (1).

Amaral (2013) propôs outra descrição, que também resulta em um modelo de programação linear inteira mista (PLIM), e cuja resolução por métodos tipo *branch and bound* mostrou-se mais eficiente. Recentemente, uma modificação no modelo de Amaral resultou numa melhora considerável no tempo de resolução computacional, bem como reduziu o número de enumerações explícitas feitas pelo método tipo *branch and bound* implementado no pacote CPLEX (Secchin & Amaral, 2018). Todas essas formulações exatas fazem uso de uma constante “M grande”. O uso de constantes do tipo é comum em modelos lineares quando queremos lidar com situações que envolvam escolhas binárias (no caso, o lado de cada facilidade, veja a Figura 1). O inconveniente desta estratégia é que as relaxações lineares são muito pobres, ou seja, fornecem limitantes inferiores muito distantes do valor ótimo. Como consequência, a resolução “tradicional” ‘por métodos tipo *branch and bound* é prejudicada, recaindo em grandes árvores de enumeração (cujo crescimento, como se sabe, tende a ser exponencial em função do número de variáveis). De fato, testes computacionais feitos com o modelo de Secchin & Amaral (2018) comprovam que a grande maioria do tempo gasto em sua resolução fica a cargo da comprovação de otimalidade (brecha de dualidade zero), e não do cálculo da solução ótima em si, uma consequência direta da pobreza das relaxações. Portanto, analisamos se as formulações matemáticas que não utilizem a estratégia de “grande M” apresentam sucesso para o problema de layout em fila dupla. É neste contexto que entram as formulações disjuntivas de Balas (veja (Martin, 1999)). Essa é uma estratégia já consolidada na literatura. De fato, a técnica foi proposta e aprimorada por Egon Balas em uma série de artigos científicos entre os anos 70 e 90, e foi utilizada com sucesso em vários contextos (veja referências em (Martin, 1999)).

Este subprojeto de iniciação científica enquadra-se no projeto de pesquisa “Métodos Computacionais em Otimização”, sob o registro PRPPG 9403/2019, no qual o orientador é coordenador. Um dos objetivos do projeto é o estudo de novos modelos e métodos de resolução eficientes para diferentes problemas de otimização, como o problema de *layout* em fila dupla, onde este subprojeto se insere.

2 Objetivos

O objetivo geral deste subprojeto foi propor novas formulações matemáticas e métodos para o problema de layout em fila dupla (PLFD), no intuito de tornar a resolução computacional mais eficiente. Para tanto, traçamos os seguintes objetivos específicos:

1. Descrever o PLFD utilizando as formulações disjuntivas de Balas (consulte (Martin, 1999)). Nessa estratégia não empregamos constantes “M grande”, evitando os problemas com relaxações pobres encontrados em formulações PLIM anteriores. Dentre os métodos de resolução que se mostram adequados para a resolução dos modelos matemáticos resultantes dessa técnica, está o da decomposição de Benders (Martin, 1999);

2. Fornecer modelos não lineares exatos para o PLFD. Sabemos que existem modelos não lineares puramente contínuos, sem o uso de variáveis inteiras ou binárias, para o PLFD.

3 Metodologia

A primeira técnica que implementamos foram as formulações disjuntivas de Balas (Martin, 1999), para retirar as restrições com “M grande”. A segunda abordagem manteve as restrições com “M grande”. Nesse ponto utilizamos o Lema 10 de Fisher et al. (2019) para reduzi-lo, como forma de diminuir o esforço na enumeração das soluções no método de *Branch and Bound*. Ambas as abordagens anteriores foram implementadas usando a linguagem de modelagem AMPL e o resolvedor CPLEX.

Uma terceira abordagem foi a reescrita do modelo. Utilizando um novo conjunto de variáveis binárias visto em (Oliveira & Santos, 2017), reduzimos o conjunto de variáveis aumentando a informação contida em cada variável. O modelo base para esta modificação foi o proposto por Amaral (2013), e foi implementada em C usando a *interface* com o pacote CPLEX.

4 Resultados

O modelo de programação inteira mista referência para o PLFD é o descrito por Amaral (2013), que replicamos a seguir:

$$\min \sum_{i<j} c_{ij} d_{ij} \tag{2a}$$

$$\text{sujeito a } d_{ij} \geq x_i - x_j, \qquad i < j \tag{2b}$$

$$d_{ij} \geq x_j - x_i, \qquad i < j \tag{2c}$$

$$d_{ij} - \alpha_{ij}(l_i + l_j)/2 - \alpha_{ji}(l_i + l_j)/2 \geq 0, \qquad i < j \tag{2d}$$

$$x_i + (l_i + l_j)/2 \leq x_j + L(1 - \alpha_{ij}), \qquad i \neq j \tag{2e}$$

$$x_1 \leq x_2 \tag{2f}$$

$$-\alpha_{ij} - \alpha_{ji} + \alpha_{ik} + \alpha_{ki} + \alpha_{jk} + \alpha_{kj} \leq 1, \qquad i < j, k \neq i, k \neq j \tag{2g}$$

$$-\alpha_{ij} + \alpha_{ji} + \alpha_{ik} - \alpha_{ki} + \alpha_{jk} - \alpha_{kj} \leq 1, \qquad i < j, k < j, i \neq k \tag{2h}$$

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} + \alpha_{ik} + \alpha_{ki} + \alpha_{jk} + \alpha_{kj} \geq 1, \qquad i < j < k \tag{2i}$$

$$x_i \in [l_i/2, L - l_i/2], \qquad \forall i \tag{2j}$$

$$\alpha_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i \neq j \tag{2k}$$

onde

- x_i é a posição do centro da facilidade i;
- d_{ij} é a distância entre os centros das facilidades i e j (veja Figura 1); em uma solução ótima, teremos $d_{ij} = |x_i - x_j|$ para todos i, j;
- c_{ij} é o custo de comunicação entre as facilidades i e j;
- l_i é a largura da facilidade i;
- $L > 0$ é um limitante superior para a maior distância entre duas máquinas; este é o “M grande” no modelo;
- α_{ij} $(1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$ são variáveis binárias que assumem valor 1 se a máquina i está do lado esquerdo da máquina j, com ambas na mesma linha, e 0 caso contrário. Por exemplo, na Figura 1, $\alpha_{ij} = 1$ e $\alpha_{ji} = \alpha_{ik} = 0$.

4.1 A formulação disjuntiva de Balas

Descrevemos aqui as atividades relativas ao primeiro objetivo delineado na Seção 2.

A primeira abordagem foi utilizar a formulação disjuntiva de Balas (Martin, 1999). Conseguimos produzir um modelo sem restrições com “M grande” (parâmetro L do modelo). Para tratar esse modelo, o método de geração de colunas é adequado. Este método trabalha com dois modelos, que chamaremos de “problema mestre” e “problema secundário”. O problema mestre consiste no modelo original usando apenas algumas poucas restrições; o problema secundário, por sua vez, fornece desigualdades válidas para o problema original (que chamaremos de “cortes de Balas”), que são adicionadas ao problema mestre para uma nova otimização. O problema secundário é construído a partir da solução mestre corrente, usando os custos duais. Resumidamente, os problemas mestre e secundário obtidos têm a seguinte forma:

Problema mestre:

$$\begin{aligned}
&\min \eta \\
\text{sujeito a } &\eta \geq \sum_{i>j} c_{i,j} \cdot d_{i,j}, \\
&\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i} \leq 1, && i < j \\
&\sum_i \sum_j (pim1_{c,i,j} \cdot \alpha_{i,j}) + \sum_i \sum_j (pim2_{c,i,j} \cdot d_{i,j}) + pim0_c \leq 0, && i \neq j \\
&\eta \leq fhc_c + \sum_i \sum_j (pim1_{c,i,j} \cdot \alpha_{i,j}) + \sum_i \sum_j (pim2_{c,i,j} \cdot d_{i,j}) - dhc_{c,i,j}, && i \neq j \\
&\text{(2d), (2g)–(2i), (2k)}
\end{aligned}$$

Problema secundário:

$$\begin{aligned}
&\min e\alpha + ((1/L) \cdot ed) \\
\text{sujeito a } &\sum_h (h\alpha_{h,i,j} \cdot \lambda_h) - e\alpha \leq l\alpha_{i.j}, \forall (i \neq j) \\
&\sum_h (h\alpha_{h,i,j} \cdot \lambda_h) - e\alpha \leq ld_{i.j}, \forall (i \neq j) \\
&\sum_h \lambda_h = 1
\end{aligned}$$

onde

- $f_{i,j}$ é o parâmetro que mede o fluxo entre os pares (i, j);
- $e\alpha$ e ed são variáveis que medem o erro das variáveis originais em relação aos parâmetros $h\alpha$, hd, $l\alpha$ e ld.

No método enumerativo *branch and bound*, é considerada uma relaxação do modelo mestre em cada nodo, onde possivelmente algumas variáveis binárias estão fixadas. Observamos que os cortes de Balas foram bons em alguns casos, reduzindo o número total de nodos enumerados explicitamente no *branch and bound* quando comparado aos cortes usuais aplicados ao modelo de Amaral (2013). Ou seja, menos subproblemas (aqueles de cada nodo) precisaram ser resolvidos. Apesar disso, quando consideramos o tempo computacional de geração dos cortes de Balas, o tempo total não foi vantajoso. De fato, lembramos que a obtenção dos cortes de Balas requerem a resolução do problema secundário.

4.2 Modificações no modelo de referência e novas regras de *Branch and Bound*

Considerando que o desempenho da estratégia disjuntiva de Balas não ofereceu resultados convincentes, voltamos a considerar modelos com "M grande". Uma estratégia abordada foi reduzir o tamanho do "M grande" como no Lema 10 de (Fisher et al., 2019). Junto a isso, utilizamos a soma $u_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji}$, como visto em Oliveira & Santos (2017), reescrevendo as restrições (2g)–(2i). Após uma análise do modelo de referência, provamos matematicamente que (2h) e algumas inequações contidas em (2g) são redundantes na otimalidade, e logo as removemos do modelo. Obtemos assim o novo modelo para o PLFD:

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{i<j} c_{ij} d_{ij} & \\
\text{sujeito a } & d_{ij} \geq x_i - x_j, & i < j \\
& d_{ij} \geq x_j - x_i, & i < j \\
& d_{ij} - u_{ij}(l_i + l_j)/2 \geq 0, & i < j \\
& x_i + (l_i + l_j)/2 \leq x_j + L(1 - \alpha_{ij}), & i \neq j \\
& x_1 \leq x_2 & \\
& u_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} & i < j \\
& -u_{ij} + u_{ik} + u_{jk} \leq 1, & i < j < k \\
& u_{ij} + u_{ik} + u_{jk} \geq 1, & i < j < k \\
& x_i \in [l_i/2, L - l_i/2], & \forall i \\
& u_{ij}, \alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \{0, 1\}, & i < j.
\end{aligned}
$$

Além disso, adotamos o valor de L dado por Fisher et al. (2019):

$$L = \sum_{i=\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor + 1} l_i,$$

onde consideramos, após possível reordenamento, que $l_i \leq l_{i+1}$ para todos $i = 1, \ldots, n-1$. Os autores deste artigo mostram que este é o melhor valor possível para L. Cabe observarmos que em (Amaral, 2013) é usado $L = \sum_{i=1}^{n} l_i$, um valor maior que o anterior.

Por fim, notamos que a escrita $u_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji}$ com u_{ij} binário faz sentido pois, pela definição das variáveis a's, temos $a_{ij} + a_{ji} = 0$ ou 1 em qualquer solução ótima. Salientamos que o modelo aqui obtido não foi abordado na literatura até o momento.

5 Discussão e Conclusões

5.1 Formulações disjuntivas de Balas

O modelo dado pela formulação de Balas mostrava-se promissor no início, dado que, retirando as restrições conflitantes que possuíam o “M grande”, era esperado que ficasse mais fácil de resolver o problema geral. Porém, para remover tais restrições é necessário gerar uma casca convexa de cortes no espaço de soluções do problema. Isso é feito por meio da técnica de geração de colunas, que adiciona uma restrição/corte a cada resolução de um problema secundário. O problema com o uso dessa técnica no PLFD, como já comentado, é o custo da geração desses cortes, que a torna tão custosa quanto lidar com o “M grande” diretamente. Com isso os modelos se equiparam em desempenho e, para instâncias menores, a resolução do modelo de referência é preferível em média.

5.2 Modelo com L mínimo e novo conjunto de variáveis

O modelo com o L mínimo de Fisher et al. (2019) e o novo conjunto de variáveis usando a técnica apresentada por Oliveira & Santos (2017) se mostrou muito promissora tendo melhoras visíveis em relação ao modelo de Amaral (2013). De fato, observamos uma redução no tempo de resolução e no número de nodos no *branch and bound*. A fim de termos mais controle sobre o processo de ramificação do método enumerativo, decidimos migrar do AMPL para um código em C, usando a interface C do resolvedor CPLEX.

5.3 Problemas encontrados durante o desenvolvimento da pesquisa

Em geral não foram encontradas grandes dificuldade em relação ao projeto, visto que, ao lidarmos com uma nova ideia, essa era direcionada/implementada. Dentre as ideias que surgiram durante o estudo, uma delas, a do novo modelo linear inteira misto com as novas variáveis u_{ij}, não foi finalizada. Mesmo assim, testes bem preliminares foram realizados e sugerem que o modelo proposto pode ser útil se calibrarmos/implementarmos o método enumerativo corretamente.

Em relação ao segundo objetivo delineado no subprojeto (veja a seção 2), um novo modelo não linear puramente contínuo, sem variáveis inteiras/binárias, foi estudado para o PLFD e casos particulares. A ideia para o modelo não linear é simples: imaginar uma fila no lado positivo da reta real, e a outra no lado negativo (imagine as duas filas da Figura 1 lado a lado); assim, considerar posições x_i positivas e “negativas” e redefinir as distâncias d_{ij} para refletir a nova configuração. É possível estabelecer então um modelo não linear puramente contínuo (porém não convexo) para o PLFD. Alguns testes preliminares foram feitos, sem conclusão definitiva.

Devido à pandemia do Covid-19, fiquei sem acesso aos equipamentos fornecidos pela universidade e, assim, os testes não puderam ter o andamento satisfatório. Com isso, a ideia de uma nova regra de ramificação para o *branch and bound* usando o novo modelo linear com as variáveis u's, implementada em C, não teve prosseguimento. Porém, chegamos a implementar um código funcional e efetuamos alguns testes preliminares. Alguns deles são apresentados na próxima seção.

6 Testes computacionais

Os testes foram feitos em uma máquina com 1 processador Intel(R) Xeon(R) Silver 4114 CPU @ 2.20GHz 10 núcleos (20 threads), 160Gb RAM. Sistema GNU Linux Ubuntu, IBM CPLEX 12.9, AMPL versão 20191108. As tabelas a seguir contêm parte dos testes realizados comparando a resolução do PLFD por diferentes estratégias.

Tabela 1: Modelo de Amaral (2013)

Instância	Valor ótimo	Nodos *branch and bound*	L	Tempo (seg)
HA5	52,5	0	22	18,81
am12a	1493	192.564	80	328,99
am13a	2456,5	449.888	89	1000,33
am14_1	2738,5	3.738.203	92	4529,99

Tabela 2: Modelo com formulações disjuntivas de Balas

Instância	Valor ótimo	Nodos *branch and bound*	Tempo (seg)
HA5	52,5	0	0,12
am12a	1493	143.018	598,05
am13a	2456,5	1.014.434	3.287,28
am14_1	2738,5	1.523.205	6.516,33

Tabela 3: Modelo com L mínimo e redução do número de variáveis binárias (novo modelo com variáveis u's)

Instância	Valor ótimo	Nodos *branch and bound*	L	Tempo (seg)
HA5	52,5	0	17	0,06
am12a	1493	250.763	52	175,12
am13a	2456,5	820.662	54	944,26
am14_1	2738,5	2.935.524	61	5.888,35

Referências

Amaral, A. R. S. (2013). Optimal solutions for the double row layout problem. *Optimization Letters*, 7:407–413.

Chung, J. & Tanchoco, J. M. A. (2010). The double row layout problem. *International Journal of Production Research*, 48(3):709–727.

Fisher, A., Fisher, F., & Hungerländer, P. (2019). New exact approaches to row layout problems. *Mathematical Programming Computation*, (11):703–754.

Martin, R. K. (1999). *Large Scale Linear and Integer Optimization: A Unified Approach*. Kluwer Academic Publishers.

Oliveira, W. A. d. & Santos, M. O. (2017). A new branching rule to solve the capacitated lot sizing and scheduling problem with sequence dependent setups. *TEMA (São Carlos)*, 18:515–529.

Secchin, L. D. & Amaral, A. R. S. (2018). An improved mixed-integer programming model for the double row layout of facilities. *Optimization Letters*, (13):193–199.