

## O Problema de Alocação de Horários via Programação Inteira

### Identificação:

Grande área do CNPq.: Ciências Exatas e da Terra  
Área do CNPq: Matemática  
Título do Projeto: Otimização combinatória: uma visão teórica e computacional  
Professor Orientador: Leonardo Delarmelina Secchin  
Estudante PIBIC/PIVIC: Rafael Marin Permanhane

*Resumo: A elaboração de tabelas de horários é uma tarefa árdua. Neste trabalho abordamos o problema voltado ao Departamento de Matemática Aplicada CEUNES/UFES. Nosso modelo, de programação inteira, leva em consideração a preferência dos professores, horários de almoço e jantar, turnos de trabalho, condensação dos horários de professores, dentre outros. A estratégia de resolução é dividida em duas fases, inspirados no trabalho de Daskalaki e Birbas [1], e utilizando o método branch-and-cut. Os testes computacionais indicam resultados satisfatórios.*

*Palavras chave: Tabela de horários, Programação Inteira.*

## 1 Introdução

O problema da elaboração de grade de horários consiste no escalonamento de um conjunto de disciplinas entre professores e salas de aula, durante um período de tempo pré-definido. É objeto de estudo de vários autores. Dentre eles, MirHassani [2] relata o problema na Faculdade de Matemática da Universidade de Tecnologia de Sharood, no Irã. Daskalaki e Birbas [1] apresentam um modelo de propósito geral. Ambos os trabalhos modelam o problema via programação inteira. MirHassani propõe uma formulação simplificada e eficiente do ponto de vista computacional. Já Daskalaki e Birbas concebem um modelo bem mais completo, e evidentemente, de maior complexidade computacional.

Utilizamos um modelo de programação inteira, assim como Daskalaki e Birbas [1], e uma estratégia de resolução em duas fases, parecida com a proposta pelos autores: a primeira fase aloca disciplinas aos professores levando em consideração, entre outras coisas, as preferências dos professores e o balanceamento de carga horária entre os mesmos; na segunda fase os horários são estabelecidos efetivamente, buscando horários compactos, cuidando dos turnos de trabalhos dos professores, dentre outras coisas.

Estudamos a realidade do Departamento de Matemática Aplicada (CEUNES/UFES), criando uma tabela de horários semanal para cada professor e turma. Dados reais do semestre letivo 2012/2 foram utilizados. Restrições e variáveis, as quais serão detalhadas ao longo do relatório, foram propostas para se adequar à realidade do Departamento. No que segue, apresentamos o modelo proposto. Começamos pelos índices utilizados.

Tipo	Índices	Descrição
Professor	$p$	Professores do Departamento
Grupo	$g$	Grupos de disciplinas (agrupadas por tipo/área)
Disciplina	$c$	Disciplinas do Departamento
Dia	$d$	Dias da semana (Seg = 0 a Sex = 4)
Horário	$h, h_1, h_2$	Possíveis horários para aulas, indexados de 1 a 16 de acordo com a Tabela 1
Turma	$m$	Turmas das disciplinas

Tabela 1: Turnos e horários de aulas.

Horário	Índice	Turno
07:00h as 07:50h	0	Matutino
07:50h as 08:40h	1	Matutino
08:40h as 09:30h	2	Matutino
09:50h as 10:40h	3	Matutino
10:40h as 11:30h	4	Matutino
11:30h as 12:20h	5	Matutino
13:00h as 13:20h	6	Vespertino
13:50h as 14:40h	7	Vespertino
14:40h as 15:30h	8	Vespertino
15:30h as 16:20h	9	Vespertino
16:40h as 17:30h	10	Vespertino
17:30h as 18:20h	11	Vespertino
18:50h as 19:40h	12	Noturno
19:40h as 20:30h	13	Noturno
20:50h as 21:40h	14	Noturno
21:40h as 22:30h	15	Noturno

As disciplinas  $c$  do modelo são indexadas à turma principal, podendo ter um máximo de 3 turmas adicionais, destinadas a alunos repetentes, por exemplo. Agora, vamos descrever o modelo da primeira fase explicitando as variáveis utilizadas.

$$x_{pc} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ ministra a disciplina } c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{pg} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ ministra disciplinas do grupo } g \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$w_p = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ ministra disciplinas no noturno} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$eq$  = limitante inferior para carga horária dos professores não chefes

Os parâmetros utilizados estão listados a seguir.

- OBRIGprofs[ $p$ ] = grupo das disciplinas obrigatórias para o professor  $p$   
 PREF1profs[ $p$ ] = grupo das disciplinas de maior preferência do professor  $p$   
 PREF2profs[ $p$ ] = grupo das disciplinas de média preferência do professor  $p$   
 PREF3profs[ $p$ ] = grupo das disciplinas de baixa preferência do professor  $p$   
 $C[p]$  = 1, se o professor é chefe e 0, caso contrário  
 CHadicional[ $p$ ] = carga horária adicional do professor  $p$  (atividades de pesquisa e extensão)

- $CH[c]$  = carga horária semanal da disciplina  $c$   
 $G[c]$  = grupo de disciplinas do mesmo tipo que  $c$   
 Turno[ $c$ ] = {0, 1, 2, 3}  
 $T[c]$  = turma principal que terá a disciplina  $c$   
 $T2[c], T3[c], T4[c]$  = turmas secundárias que terão a disciplina  $c$

Tratamos os turnos da seguinte forma: 0 = diurno, 1 = matutino, 2 = vespertino e 3 = noturno.

Como estamos interessados em construir uma tabela de horários semanal, convertemos as cargas horárias das disciplinas de semestrais para semanais, segundo o quadro abaixo.

CH semestral	CH semanal
30h	$CH[c] = 2$
45h	$CH[c] = 3$
60h	$CH[c] = 4$
75h	$CH[c] = 5$
90h	$CH[c] = 6$

Para cada  $p, g$  definiremos o parâmetro  $Pprofgrupo[p][g]$ , que nos diz a preferência de cada professor por cada grupo de disciplinas, da seguinte forma:

- PREF1profs[ $p$ ] =  $g \Rightarrow Pprofgrupo[p][g] = -7$ ;  
 PREF2profs[ $p$ ] =  $g \Rightarrow Pprofgrupo[p][g] = -5$ ;  
 PREF3profs[ $p$ ] =  $g \Rightarrow Pprofgrupo[p][g] = -3$ ;  
 $Pprofgrupo[p][g] = 10$ , caso contrário.

Os valores negativos podem ser explicados como segue. Primeiramente, lembremos que estamos buscando uma tabela de horários que atenda da melhor maneira possível a preferência dos professores. No modelo adotamos o sentido de minimização da função objetivo, e logo precisamos definir os parâmetros de forma que preferências maiores tenham parâmetros menores. Isso fica evidente na função objetivo apresentada a seguir.

$$\min \sum_p \sum_g \sum_{c; G[c]=g} (x_{pc} * Pprofgrupo[p][g]) - 500 * eq$$

Esses parâmetros foram ajustados realizando testes computacionais. No que segue, apresentamos as restrições da primeira fase.

Cada disciplina deve ser ministrada exatamente por um professor.

$$\forall c, \sum_p x_{pc} = 1 \quad (1)$$

A variável  $eq$ , que é maximizada na função objetivo, busca equilibrar as cargas horárias de todos os professores. Precisamos de restrições que nos digam como é calculada a carga horária de cada professor, e para que tenha sentido a variável  $eq$ , elas devem estar relacionadas.

$$\forall p \text{ com } C[p] = 0, \sum_c (2,5 * CH[c] * x_{pc}) + CHadicional[p] \geq eq \quad (2)$$

$$\forall p \text{ com } C[p] = 1, 4 \leq \sum_c (CH[c] * x_{pc}) \leq 5 \quad (3)$$

Na restrição 2, a carga horária de aula está multiplicada por 2,5 pois na UFES, cada hora/aula equivale a 2,5 horas de trabalho. A restrição 3 nos diz que cada chefe ou coordenador tem que ter no mínimo 4 e no máximo 5 horas/aula por semana.

Por questões legais, a carga horária mínima de aulas dos professores não chefes deve ser de 8 horas semanais, e portanto

$$\forall p \text{ com } C[p] = 0, \sum_c (CH[c] * x_{pc}) \geq 8 \quad (4)$$

Lembrando que as variáveis  $x_{pc}$  nos dizem se o professor  $p$  ministra a disciplina  $c$ , e que existe um parâmetro que relaciona cada disciplina com seu grupo, precisamos relacionar as variáveis  $y_{pg}$  com  $x_{pc}$ :

$$\forall p, g, y_{pg} \leq \sum_{c:G[c]=g} x_{pc} \leq M * y_{pg} \quad (5)$$

Na restrição acima,  $M$  é uma constante, que pode ser adequada de acordo com o que se deseja. Por exemplo, se quisermos que cada professor ministre no máximo 2 disciplinas por grupo, então fixamos  $M = 2$ . Em nosso caso fixamos  $M = 4$ . Além disso, essa restrição diz que o professor  $p$  ministra disciplinas do grupo  $g$  se, e somente se, alguma disciplina do grupo  $g$  é alocada a ele.

Para cada professor não chefe, fixamos um máximo de 3 grupos, e para o restante, 2 grupos.

$$\forall p \text{ com } C[p] = 0, \sum_g y_{pg} \leq 3 \quad (6)$$

$$\forall p \text{ com } C[p] = 1, \sum_g y_{pg} \leq 2 \quad (7)$$

Da mesma forma que fizemos com as variáveis  $y_{pg}$ , vamos relacionar as variáveis  $w_p$  com  $x_{pc}$ , de forma que, para seguir a realidade do Departamento, professores que ministram aula à noite não ministrem pela manhã.

$$\forall p, \sum_{c:Turno[c]=1} x_{pc} \leq M * (1 - w_p) \quad (8)$$

Observe que se  $w_p = 0$ , ou seja, se o professor  $p$  não dá aula à noite, essa restrição não é suficiente para dizer

que o professor não tenha disciplinas a noite. Portanto impomos

$$\forall p, \sum_{c; \text{Turno}[c]=2} x_{pc} \leq 3 * w_p \quad (9)$$

limitando em 3 a quantidade de disciplinas noturnas para um professor.

Cada professor ministra apenas uma disciplina para uma determinada turma principal.

$$\forall p, m, \sum_{c; T[c]=m} x_{pc} \leq 1 \quad (10)$$

Disciplinas específicas devem ser alocadas para professores da área. Essa obrigação é estabelecida pelo Departamento.

$$\forall p, c; G[c] = \text{OBRIGprofs}[p], \quad x_{pc} = 1 \quad (11)$$

Por fim, o domínio das variáveis.

$$x_{pc}, y_{pg}, w_p \in \{0, 1\}, \quad \forall p, c, g, \quad eq \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

A segunda fase depende da divisão de disciplinas entre os professores, feita na primeira fase. Consideremos portanto uma solução ótima  $(x_{pc}, y_{pg}, w_p, eq)$  da primeira fase.

Descreveremos agora o modelo da segunda fase. Começemos explicitando as variáveis utilizadas.

$$\bar{x}_{chd} = \begin{cases} 1, & \text{se a disciplina } c \text{ é dada no horário } h \text{ do dia } d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\bar{y}_{cd} = \begin{cases} 1, & \text{se a disciplina } c \text{ é dada no dia } d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\bar{w}_{md} = \begin{cases} 1, & \text{se a turma } m \text{ tem aula no dia } d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\bar{z}_{pd} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } p \text{ dá aula no dia } d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$hmin_p$  = horário mais cedo que o professor  $p$  dá aula na semana

$hmax_p$  = horário mais tarde que o professor  $p$  dá aula na semana

Como na segunda fase só nos resta estabelecer os horários das disciplinas, que já possuem professor definido, é de se esperar que não sejam necessários muitos parâmetros adicionais. De fato, os parâmetros da segunda fase, relacionados à alocação de horários, são:

$Hmax[\alpha]$  = máximo de aulas diárias das disciplinas com CH semanal igual à  $\alpha$  ( $\alpha \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ )

$GT[c]$  = grupo das turmas da disciplina  $c$ , tanto a principal quanto as secundárias

Evidentemente,

$$GT[c] = \{T[c], T2[c], T3[c], T4[c]\}.$$

A seguir, definiremos os parâmetros Hmax, seguindo a realidade do Departamento.

$$\text{Hmax}[\alpha] = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = 2 \\ 3, & \text{se } \alpha = 3, 5 \text{ ou } 6 \\ 4, & \text{se } \alpha = 4 \end{cases}$$

Deve-se alocar no mínimo 2 aulas em sequência em cada dia. Por isso,  $\text{Hmax}[\alpha] \geq 2$ .

Com a solução da primeira fase e essas novas variáveis, estamos prontos para estabelecer o modelo da segunda fase, que procede da seguinte forma

$$\min \sum_d \sum_c (0.3 * \bar{x}_{c0d} + 0.1 * \bar{x}_{c1d} + 0.1 * \bar{x}_{c14d} + 0.3 * \bar{x}_{c15d}) - \sum_d \sum_{c: \text{CH}[c]=4} 10 * \bar{y}_{cd} + \sum_p (\text{hmax}_p - \text{hmin}_p)$$

Os termos da primeira soma procuram evitar a escolha dos dois primeiros horários da manhã e dos dois últimos da noite. Observe que os fatores que multiplicam as variáveis são positivos e pequenos: nosso intuito não é dar prioridade à proibição desses horários. A ideia é deslocar disciplinas somente quando não há prejuízos à distribuição global das disciplinas.

Definimos um número mínimo e um máximo para a quantidade de dias que a disciplina  $c$  é dada na semana utilizando as variáveis  $\bar{y}_{cd}$ .

$$\forall c \text{ com } \text{CH}[c] = 2 \text{ ou } \text{CH}[c] = 3, \quad \sum_d \bar{y}_{cd} = 1 \quad (13)$$

$$\forall c \text{ com } \text{CH}[c] = 4, \quad 1 \leq \sum_d \bar{y}_{cd} \leq 2 \quad (14)$$

$$\forall c \text{ com } \text{CH}[c] = 5, \quad \sum_d \bar{y}_{cd} = 2 \quad (15)$$

$$\forall c \text{ com } \text{CH}[c] = 6, \quad 2 \leq \sum_d \bar{y}_{cd} \leq 3 \quad (16)$$

Observe ainda que disciplinas com carga horária semanal igual a 4 podem ser alocadas em um único dia com quatro janelas ou em dois dias com duas janelas por dia. No entanto, nosso modelo dá preferência à segunda opção, pois o número de dias dessas disciplinas está sendo maximizado na função objetivo.

Como já foi dito, o número mínimo de aulas de cada disciplina por dia é de duas janelas de horário e um máximo de Hmax[ $c$ ]. Devemos então conectar as variáveis  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

$$\forall c, d, \quad 2 * \bar{y}_{cd} \leq \sum_h \bar{x}_{chd} \leq \text{Hmax}[\text{CH}[c]] * \bar{y}_{cd} \quad (17)$$

Uma restrição óbvia é que em cada horário, cada professor ministre no máximo uma disciplina.

$$\forall p, d, h, \quad \sum_c x_{pc} * \bar{x}_{chd} \leq 1. \quad (18)$$

Observe que  $x_{pc}$  é constante na segunda fase, e o termo  $x_{pc} * \bar{x}_{chd}$  é igual a 1 se, e somente se, o professor  $p$  ministra a disciplina  $c$  no dia  $d$ , horário  $h$ .

Outra é que todas as disciplinas devem ter suas cargas horárias satisfeitas.

$$\forall c, \quad \sum_{d,h} \bar{x}_{chd} = \text{CH}[c]. \quad (19)$$

Respeitando os horários de almoço e jantar dos professores, exigimos que

$$\forall p, d, \sum_c x_{pc} * \bar{x}_{c5d} + \sum_c x_{pc} * \bar{x}_{c6d} \leq 1 \quad (20)$$

$$\forall p, d, \sum_c x_{pc} * \bar{x}_{c11d} + \sum_c x_{pc} * \bar{x}_{c12d} \leq 1 \quad (21)$$

Disciplinas de turnos fixados não podem ser dadas em outros turnos. Por exemplo, disciplinas de um curso noturno não podem ser dadas no diurno.

$$\forall c, \text{ com Turno}[c] = 0, \sum_{d,h;h \geq 12} \bar{x}_{chd} = 0 \quad (22)$$

$$\forall c, \text{ com Turno}[c] = 1, \sum_{d,h;h \geq 6} \bar{x}_{chd} = 0 \quad (23)$$

$$\forall c, \text{ com Turno}[c] = 2, \sum_{d,h;h < 6 \text{ ou } h \geq 12} \bar{x}_{chd} = 0 \quad (24)$$

$$\forall c, \text{ com Turno}[c] = 3, \sum_{d,h;h < 12} \bar{x}_{chd} = 0 \quad (25)$$

Em um mesmo dia, queremos que todas as aulas referentes a uma mesma disciplina sejam dadas consecutivamente.

$$\forall c, d, h_1, h_2, \text{ com } h_1 \leq h_2 - 2, \sum_{h_1 < h < h_2} \bar{x}_{chd} \geq (h_2 - h_1 - 1) * (\bar{x}_{ch_1d} + \bar{x}_{ch_2d} - 1) \quad (26)$$

Observe que em (26) se uma disciplina  $c$  tem aula nos horários  $h_1$  e  $h_2$  do dia  $d$ , isto é, se  $\bar{x}_{ch_1d} + \bar{x}_{ch_2d} = 2$ , os  $h_2 - h_1 - 1$  horários intermediários deverão ser ocupados pela disciplina  $c$ . Portanto a restrição (26) está bem posta.

Para uma melhor distribuição das aulas durante a semana, proibimos que sejam ministradas aulas em dias consecutivos e também que sejam dadas aulas somente segunda e sexta, naquelas disciplinas com carga horária semanal maior que 3 horas.

$$\forall c \text{ com CH}[c] = 4 \text{ ou } \text{CH}[c] = 5, \forall d < 4, \bar{y}_{cd} + \bar{y}_{c(d+1)} \leq 1 \quad (27)$$

$$\forall c \text{ com CH}[c] = 4 \text{ ou } \text{CH}[c] = 5, \bar{y}_{c0} + \bar{y}_{c4} \leq 1 \quad (28)$$

Cada turma tem no máximo uma disciplina por horário. Aqui são consideradas turmas principal e secundárias.

$$\forall m, h, d, \sum_{c; m \in \text{GT}[c]} \bar{x}_{chd} \leq 1 \quad (29)$$

As turmas principais devem ter seu horário fechado em um único turno a cada dia.

$$\forall m, d, h, \bar{w}_{md} \leq \sum_{c; T[c]=m} \bar{x}_{chd} \leq 6 * \bar{w}_{md} \quad (30)$$

Notemos que cada turno tem, no máximo, seis horários. Por isso o fator seis na restrição.

É comum na literatura também a divisão de salas. Em nosso trabalho não nos preocupamos com isso. No entanto, garantimos que há espaço físico disponível para a alocação, limitando, em cada horário, o número de

disciplinas em 16 (são 16 salas de aula disponíveis)

$$\forall d, h, \sum_c \bar{x}_{chd} \leq 16 \quad (31)$$

Todos os professores têm compromissos com reunião departamental. Adicionalmente os chefes de departamento e coordenadores de curso têm reuniões de Centro. Esses horários são estabelecidos pelo Departamento e Centro, e não podem haver aulas para os professores envolvidos.

$$\forall p, h; 8 \leq h < 12, \sum_c x_{pc} * \bar{x}_{ch3} = 0 \quad (32)$$

$$\forall p; C[p] = 1, h; 7 \leq h < 11 \sum_c x_{pc} * \bar{x}_{ch0} = 0 \quad (33)$$

$$\forall p; C[p] = 1, h; 2 \leq h < 6 \sum_c x_{pc} * \bar{x}_{ch2} = 0 \quad (34)$$

A condensação dos horários de cada professor é desejável. Queremos então evitar ao máximo janelas ociosas entre aulas. Fazemos isso minimizando a diferença  $hmax_p - hmin_p$  na função objetivo. As restrições que definem  $hmax_p$  e  $hmin_p$  de forma adequada são as seguintes:

$$\forall p; w[p] = 0, d, h; 0 \leq h < 6 \sum_c x_{pc} * h * \bar{x}_{chd} \geq hmin_p \quad (35)$$

$$\forall p; w[p] = 1, d, h; 6 \leq h < 11 \sum_c x_{pc} * h * \bar{x}_{chd} \geq hmin_p \quad (36)$$

$$\forall p; w[p] = 0, d, h; 7 \leq h < 12 \sum_c x_{pc} * h * \bar{x}_{chd} \leq hmax_p \quad (37)$$

$$\forall p; w[p] = 1, d, h; 12 \leq h < 16 \sum_c x_{pc} * h * \bar{x}_{chd} \leq hmax_p \quad (38)$$

Como são postas, elas garantem que  $hmax_p \geq hmin_p$ .

Há disciplinas com turno diurno. Neste caso a segunda fase decide em qual turno tal disciplina ficará. Por outro lado, há disciplinas exclusivas do matutino e do noturno. Neste caso, a primeira fase proíbe que o professor ministre aula pela manhã e a noite simultaneamente. Devemos então zerar as variáveis  $\bar{x}_{pch}$  correspondentes aos horários matutinos sempre que o professor der aula a noite.

$$\forall p; w[p] = 1, \sum_{d, h; 0 \leq h < 6, c} x_{pc} * \bar{x}_{chd} = 0 \quad (39)$$

Utilizaremos as variáveis  $\bar{z}_{pd}$  para forçar que cada professor dê no máximo 5 aulas por dia, e ainda que tenha um dia sem aulas para realizar atividades de pesquisa e extensão. Abaixo as restrições que ligam  $\bar{z}_{pd}$  e  $\bar{y}_{cd}$  e que limitam em 4 os dias de aula.

$$\forall p, d, \sum_c x_{pc} * \bar{y}_{cd} - 5 * \bar{z}_{pd} \leq 0 \quad (40)$$

$$\forall p, \sum_d \bar{z}_{pd} \leq 4 \quad (41)$$

Por fim, o domínio das variáveis.

$$\bar{x}_{chd}, \bar{y}_{cd}, \bar{z}_{pd} \in \{0, 1\}, \quad \forall p, c, d, h, \quad hmin_p, hmax_p \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall p. \quad (42)$$

## 2 Objetivos

Como foi dito anteriormente, o objetivo é a utilização da programação inteira no intuito de encontrar um mecanismo mais eficiente para construir uma tabela de horários, especificamente para o Departamento de Matemática Aplicada do CEUNES, que hoje é feito manualmente.

## 3 Metodologia

No início, estudamos conceitos de programação inteira e os métodos de resolução de planos de corte e ramificação e corte [3]. Paralelamente, os artigos de Daskalaki e Birbas [1] e MirHassani [2] serviram de base para o problema de horários. Após obtermos domínio dos assuntos, foi estudado o problema de horários na realidade do Departamento de Matemática Aplicada.

Depois de esboçar o que almejávamos, iniciamos o processo de implementação do modelo. Durante esse processo, discutimos alguns pontos que poderíamos melhorar. Realizamos testes computacionais e, com base na tabela de horários utilizada em 2012/2, vimos que o modelo encontrou uma tabela melhor, com horários bem distribuídos. Fizemos ainda ajustes em alguns parâmetros e mais testes foram realizados. Já identificamos melhoras no modelo, que deverão ser analisadas em trabalhos futuros.

## 4 Resultados

Os dados do DMA para o semestre em questão são: 18 professores, 49 disciplinas distribuídas em 29 grupos de disciplinas e 36 turmas principais. Foi utilizado um computador Intel Core 2 Quad 2.33 GHz, 2 Gb de memória RAM, sistema Linux 64 bits e o CPLEX 12.5.1. Na primeira fase, o programa chegou à otimalidade em um tempo de 3,22 segundos. Na segunda fase, após alguns testes, vimos que exigir uma brecha de dualidade nula era custoso, apesar de termos alcançado otimalidade (uma solução ótima era encontrada, mas a prova de otimalidade era computacionalmente demorada). Então foi aceita uma tolerância de 0,1% na brecha, a qual o programa alcançou 0,088% em 221,41 segundos, resultando em uma tabela de horários muito boa (em nosso caso ótima para o modelo em questão).

Apesar de utilizarmos somente os dados de um departamento, acreditamos que é possível expandir o uso da ferramenta para todos os departamentos do CEUNES, que atualmente são 7, já que os testes mostraram eficiência. Por ser uma proposta específica para a UFES, não comparamos nosso modelo com outros da literatura.

## 5 Discussão e Conclusões

Os resultados obtidos mostram que esse é um modelo que se adequou muito bem à realidade do Departamento, principalmente pela redução no tempo de trabalho, já que tal tarefa é feita manualmente.

Optamos por não levar em consideração professores substitutos. Esses docentes têm um regime diferenciado na divisão de disciplinas: sua carga horária deve ser máxima, e portanto pequenos ajustes devem ser feitos para contemplar essa realidade.

Um dos pontos a melhorar é a divisão das salas. Uma proposta é criar uma terceira fase que aloque as disciplinas nas salas, não deixando que uma mesma turma principal tenha aulas em diversas salas, por exemplo.

Lembramos que a quantidade máxima de salas é levada em consideração na segunda fase. Isso permite, em tese, ser possível estabelecermos essa terceira fase. Outro ponto que pode ser melhorado são as restrições do tipo  $\sum_{i=1}^n x_i \leq ny$  tais como (8) e (9), as quais podemos substituir por  $n$  restrições do tipo  $x_i \leq y$ . Essa substituição melhora a relaxação linear do modelo, e possivelmente o tempo computacional diminui, apesar do aumento do número de restrições.

## Referências Bibliográficas

- [1] Daskalak, S.; Birbas, T. Efficient solutions for a university timetabling problem through integer programming. *European Journal of Operational Research*, n. 160, pp 106-120, 2005.
- [2] MirHassani, S.A. A computational approach to enhancing course timetabling with integer programming. *Applied Mathematics and Computation*, n. 175, pp 814-822, 2006.
- [3] Wolsey, L.A. *Integer Programming*. Wiley-Interscience, 1998.